

Leçon 102 - Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupe des racines de l'unité. Applications.

1. Nombres complexes de module 1. —

1. Le groupe \mathbb{U} . —

- Def : On appelle groupe des nombres complexes de module 1 le noyau du morphisme de groupes $z \in \mathbb{C}^* \mapsto |z| \in \mathbb{R}_+^*$. On le note \mathbb{U} .
- Rem : En identifiant le plan complexe à \mathbb{R}^2 , \mathbb{U} n'est autre que le cercle unité S^1 .
- Thm : L'application $(r, u) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U} \mapsto r.u \in \mathbb{C}^*$ est un isomorphisme de groupes.
- Thm : L'application $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(ix) \in \mathbb{U}$ est un morphisme surjectif de groupes, 2π -périodique, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.
On en déduit $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{U}$.
- Cor : \mathbb{U} est un compact connexe de \mathbb{C} .

2. Applications trigonométriques. —

- Def : On définit les fonctions cosinus et sinus par $\cos(x) = \operatorname{Re}(\exp(ix))$ et $\sin(x) = \operatorname{Im}(\exp(ix))$.
- Pro : Formule de Moivre : $\exp(inx) = \cos(nx) + i\sin(nx)$
Formules d'Euler : $\cos(x) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}$, $\sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$
- Ex : $\exp(\frac{2i\pi}{3}) = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $\exp(\frac{i\pi}{2}) = i$.
- App : $\sum_{k=0}^n \cos(kt) = \cos(\frac{nt}{2}) \frac{\sin((n+1)t/2)}{\sin(t/2)}$ pour tous $t \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$.
- App : Linéarisation de $\cos(x)^n$: $\cos(x)^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \exp(ix(2k-n))$.
- App : Expression de $\cos(nx)$ comme polynôme en $\cos(x)$: $\cos(nx) = T_n(\cos(x))$ où T_n est le n -ième polynôme de Tchebychev.
- App : Calcul du noyau de Dirichlet et du noyau de Féjer.

3. Paramétrisation sur le cercle unité. —

- Pro : Chercher les $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $x^2 + y^2 = z^2$ revient à chercher les $(x', y') \in \mathbb{Q}^2$ tels que $x'^2 + y'^2 = 1$.
- Thm : Paramétrisation rationnelle de \mathbb{U} : L'application $t \in \mathbb{R} \mapsto (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}) \in \mathbb{U} - \{(-1, 0)\}$ est une bijection.
Elle se prolonge à $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ en associant $(-1, 0)$ au point ∞ .
- App : Les points de $\mathbb{U} - \{(-1, 0)\}$ à coordonnées rationnelles sont de la forme $(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$ pour un $t \in \mathbb{Q}$.
- App : Les solutions entières de $x^2 + y^2 = z^2$ sont de la forme $(u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$ avec $u, v \in \mathbb{Z}$.

4. Mesure d'un angle orienté. —

- Pro : Pour u, v vecteurs unitaires de \mathbb{R}^2 , il existe une unique rotation envoyant u sur v .

- Def+Pro : On munit A l'ensemble des couples de vecteurs unitaires de \mathbb{R}^2 de la relation d'équivalence : $(u, v)R(u', v')$ ssi la même rotation envoie u sur u' et v sur v' .
- Def : La classe d'équivalence de (u, v) pour R est appelée angle orienté.
On appelle \bar{A} l'ensemble des angles orientés.
- Pro : L'application qui à $(u, v) \in \bar{A}$ envoie l'unique rotation $r \in SO_2(\mathbb{R})$ telle que $r(u) = v$ est une bijection.
- Rem : Cette bijection munit \bar{A} d'une structure de groupe.
- Cor : L'application $t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$ est un morphisme surjectif, 2π -périodique, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.
L'isomorphisme induit entre $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ et $SO_2(\mathbb{R})$ permet de définir une mesure des angles orientés de vecteurs.

2. Racines de l'unité et cyclotomie. —

1. Sous-groupes des racines de l'unité. —

- Pro : Un sous-groupe de \mathbb{U} est dense ou fini.
Le sous-groupe $\langle \exp(it) \rangle$ est dense si $t \notin \mathbb{Q}$ et fini sinon.
- App : L'adhérence de la suite $(\sin(n))_n$ est le segment $[-1, 1]$.
- Def : Pour $n \geq 1$, on définit \mathbb{U}_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité : les $z \in \mathbb{U}$ tels que $z^n = 1$.
- Pro : \mathbb{U}_n est un groupe cyclique d'ordre n .
L'application $\bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mapsto \exp(\frac{2i\pi k}{n}) \in \mathbb{U}_n$ est un isomorphisme de groupes.
- Def+Pro : On appelle racine n -ième primitive de l'unité un générateur de \mathbb{U}_n .
Elles sont de la forme $\exp(\frac{2i\pi k}{n})$ pour $\operatorname{pgcd}(k, n) = 1$, on note μ_n^* leur ensemble, et il y en a $\phi(n)$.
- Ex : Racines primitives 2ièmes : -1 . Racines primitives 3ièmes : j, j^2 . Racines primitives 4ièmes : $i, -i$. Racines primitives 8ièmes : $\pm \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$.
- Pro : $\mathbb{U}_d \subset \mathbb{U}_n$ ssi $d|n$.
- Pro : $\mathbb{U}_n = \sum_{d|n} \mu_d^*$
- App : $n = \sum_{d|n} \phi(d)$.
- Pro : Dans un corps fini de cardinal p^r pour p premier, un élément x non-nul est d'ordre n ssi x est racine de $X^n - 1$ mais pas de $X^d - 1 \forall d|n, d < n$.
On en a $\phi(n)$ si $n|p^r - 1$ et 0 sinon.
- App : Le groupe des inversibles d'un corps fini est cyclique d'ordre $p^r - 1$.
- App : Théorème de Wedderburn : Tout anneau A intègre fini (non supposé unitaire ni commutatif) est un corps.

2. Polynômes cyclotomiques. —

- Def : Pour tout $n \geq 1$, on définit $\Phi_n(X) := \prod_{k \wedge n = 1, k \leq n} (X - e^{2i\pi \frac{k}{n}}) \in \mathbb{C}[X]$ le n -ième polynôme cyclotomique.

- **Dev** : Φ_n est un polynôme unitaire à coefficients entiers, irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$, de degré $\phi(n) = \text{Card}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^*)$ et tel que $\prod_{d|n} \Phi_d = X^n - 1$.
- **Ex** : $\Phi_1 = X - 1$, $\Phi_2 = X + 1$, $\Phi_3 = X^2 + X + 1$, $\Phi_8 = X^4 + 1$.
- **Pro** : Pour p premier, $\Phi_p(X) = X^{p-1} + \dots + X + 1$, $\Phi_{p^2}(X) = X^{p(p-1)} + \dots + X + 1$.
- **Théorème de Kronecker** : Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ dont les racines dans \mathbb{C} sont non-nulles et de module ≤ 1 . Alors les racines de P sont des racines de l'unité.
- **Cor** : Si de plus P est irréductible, alors P est un polynôme cyclotomique.

3. Applications en théorie des représentations. —

- **Def** : Soit G un groupe fini. Une représentation linéaire sur G est un morphisme $\rho : G \rightarrow GL(V)$ où V est un \mathbb{C} -ev de dimension finie. Le caractère χ_ρ est l'application $g \in G \mapsto \text{Tr}(\rho(g)) \in \mathbb{C}$.
- **Def** : Une représentation est dite irréductible ssi aucun sous-espace strict de V n'est stable par tous les $\rho(g)$. Un caractère irréductible est le caractère d'une représentation irréductible.
- **Pro** : Soit G un groupe fini d'ordre n . Soit ρ une représentation de G . $\forall g \in G$, $\rho(g)$ est diagonalisable et son spectre est inclus dans \mathbb{U}_n .
- **Pro** : Si G est abélien, alors toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1 et à valeurs dans \mathbb{U}_n .
- **App** : Table de caractères d'un groupe cyclique.
- **Pro** : Soit G un groupe abélien fini et H un sous-groupe de G . Pour tout caractère $\chi \in \widehat{H}$, il existe un caractère $\tilde{\chi} \in \widehat{G}$ tel que $\tilde{\chi}|_H = \chi$.
- **Dev** : Théorème de structure des groupes abéliens finis : Soit G un groupe abélien non trivial. Il existe $r \geq 1$ et des entiers $d_1 | \dots | d_r$ tels que $G \simeq \mathbb{U}_{d_1} \times \dots \times \mathbb{U}_{d_r}$. Les d_i sont uniques et sont appelés facteurs invariants de G .

Références

Arnaudiès, Fraysse : \mathbb{U} , l'isomorphisme $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+^*$, morphisme surjectif $\exp(ix)$, noyau, cos et sin, formule d'Euler, formule de Moivre, linéarisation du \cos^n , polynômes de Tchebychev. Détermination de l'argument.

Audin : Relation d'équi pour angle orienté, mesure d'un angle orienté.

Combes : Paramétrisation du cercle unité, triplets pythagoriciens. $\phi(n)$, exemples.

Perrin : Etude des polynômes cyclotomiques.(Dev)

Peyré : Représentations, Table des caractères d'un groupe cyclique, Théorème de structure des groupes abéliens finis.(Dev)

Gozard : \mathbb{U}_n , groupe cyclique, exemples. Polynômes cyclotomiques.

FGN (Algèbre 1) : Théorème de Kronecker, corollaire.